Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

Programmes des classes préparatoires aux Grandes Ecoles

Filière : **économique et commerciale**

Option : **Technologique (ECT)**

Discipline : **Mathématiques-Informatique**

Première année

Table des matières

INTRODUCTION

1 Objectifs généraux de la formation

Les mathématiques jouent un rôle important en sciences économiques et en gestion, dans les domaines notamment de la finance ou de la gestion d'entreprise, de la finance de marché, des sciences sociales. Les probabilités et la statistique interviennent dans tous les secteurs de l'économie et dans une grande variété de contextes (actuariat, biologie, épidémiologie, finance quantitative, prévision économique, ...) où la modélisation de phénomènes aléatoires à partir de bases de données est indispensable.

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement des classes préparatoires économiques et commerciales et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants. Ils précisent aussi certains points de terminologie et certaines notations.

Les limites du programme sont clairement précisées. Elles doivent être respectées aussi bien dans le cadre de l'enseignement en classe que dans l'évaluation.

L'objectif n'est pas de former des professionnels des mathématiques, mais des personnes capables d'utiliser des outils mathématiques ou d'en comprendre l'usage dans diverses situations de leur parcours académique et professionnel.

Une fonction fondamentale de l'enseignement des mathématiques dans ces classes est de structurer la pensée des étudiants et de les former à la rigueur et à la logique en insistant sur les divers types de raisonnement (par équivalence, implication, l'absurde, analyse-synthèse...).

2 Compétences développées

L'enseignement de mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales vise à développer en particulier chez les étudiants les compétences suivantes :

- **Rechercher et mettre en œuvre des stratégies adéquates :** savoir analyser un problème, émettre des conjectures notamment à partir d'exemples, choisir des concepts et des outils mathématiques pertinents.
- **Modéliser :** savoir conceptualiser des situations concrètes (phénomènes aléatoires ou déterministes) et les traduire en langage mathématique, élaborer des algorithmes.
- **Interpréter :** être en mesure d'interpréter des résultats mathématiques dans des situations concrètes, avoir un regard critique sur ces résultats.
- **Raisonner et argumenter :** savoir conduire une démonstration, confirmer ou infirmer des conjectures.
- **Maîtriser les concepts et les techniques mathématiques :** savoir employer les symboles mathématiques à bon escient, être capable de mener des calculs de manière pertinente et efficace. Utiliser avec discernement l'outil informatique.
- **Communiquer par écrit et oralement :** comprendre les énoncés mathématiques, savoir rédiger une solution rigoureuse, présenter une production mathématique.

3 Architecture des programmes

Le niveau de référence à l'entrée de la filière EC voie technologique est celui de l'enseignement obligatoire de la classe de terminale sciences et technologies du management et de la gestion. Le programme se situe dans le prolongement de ceux des classes de première et terminale de la filière STMG.
Il est indispensable que chaque enseignant ait une bonne connaissance des programmes du lycée, afin que ses approches pédagogiques ne soient pas en rupture avec l'enseignement qu'auront reçu les étudiants en classes de première et de terminale.

Le programme s'organise autour de quatre points qui trouveront leur prolongement dans les études futures des étudiants :

- Une approche de l'algèbre linéaire est présentée en première année par le biais des systèmes d'équations linéaires. Le calcul matriciel sera abordé en seconde année.

- L'analyse en 1ère année, vise à mettre en place l'ensemble des outils usuels autour des suites et des fonctions. L'aspect opératoire et l'interprétation graphique sont privilégiés. Aucune difficulté théorique n'est soulevée.

- Les probabilités et les statistiques s'inscrivent dans la continuité de la formation initiée dès la classe de troisième et poursuivie jusqu'en classe de terminale. Le cadre principal est celui des univers finis pour lesquels le langage abstrait des probabilités est mis en place.

- L'informatique est enseignée tout au long de l'année en lien direct avec le programme de mathématiques. Cette pratique régulière permettra aux étudiants de construire ou de reconnaître des algorithmes relevant par exemple de la simulation de lois de probabilité, de recherches de valeurs approchées en analyse.

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme. Les probabilités, par exemple, permettent d'utiliser certains résultats d'analyse (suites, séries, intégrales...) et justifient l'introduction du vocabulaire ensembliste.

Le programme de mathématiques est organisé en deux semestres de volume sensiblement équivalent. Ce découpage en deux semestres d'enseignement doit être respecté ; en revanche, au sein de chaque semestre, aucun ordre particulier n'est imposé et chaque professeur y conduit en toute liberté l'organisation de son enseignement, bien que la présentation par blocs soit fortement déconseillée.

Dans le contenu du premier semestre, figurent les notions nécessaires et les objets de base qui serviront d'appui à la suite du cours. Ces éléments sont accessibles à tous les étudiants quelles que soient les pratiques antérieures et potentiellement variables de leurs lycées d'origine. Ces contenus vont, d'une part, permettre une approche plus approfondie et rigoureuse de concepts déjà présents mais peu explicités en classe de terminale, et d'autre part, mettre en place certaines notions et techniques de calcul et de raisonnement fondamentales pour la suite du cursus.

Le programme se présente de la manière suivante : dans la colonne de gauche figurent les contenus exigibles des étudiants ; la colonne de droite comporte des précisions sur ces contenus, des applications ou des exemples d'activités.

Les développements formels ou trop théoriques doivent être évités, ils ne correspondent pas au coeur de formation de ces classes préparatoires.

Les résultats mentionnés dans le programme seront admis ou démontrés selon les choix didactiqnes faits par le professeur ; pour certains résultats, marqués comme « admis », la présentation d'une démonstration en classe est déconseillée.

Les travaux dirigés sont le moment privilégié de la mise en œuvre, et de la prise en main par les étudiants des techniques nsuelles et bien délimitées inscrites dans le corps du programme. Cette maîtrise s'acquiert notamment par l'étude de problèmes que les étudiants doivent *in fine* être capables de résoudre par eux-mêmes.

Le symbole $\boxed{\blacktriangleright}$ indique les parties du programme pouvant être traitées en liaison avec l'informatique. Cette partie du programme est commune à l'ensemble des filières des classes économiques. Le logiciel de référence choisi pour ce programme est Scilab.

Enseignement de mathématiques du premier semestre

Le premier semestre doit permettre la consolidation des notions étndiées jusqu'en terminale tout en les approfondissant.

I - Outils mathématiques

Ce chapitre présente quelques points de vocabulaire, quelques notations, ainsi que des modes de raisonnements indispensables pour avoir la capacité d'argumenter rigoureusement sur un plan mathématique. Les paragraphes 1) et 2) ne doivent pas faire l'objet d'un exposé théorique, les notions seront introduites progressivement au cours du semestre, et renforcées au delà, en fonction de leur utilité.

1 - Raisonnement

On confrontera les étudiants à divers modes de raisonnements (démontrer une implication, une équivalence, raisonnement par l'absurde, raisonnement par récurrence) à l'aide d'exemples variés issus des différents chapitres étudiés.

Les étudiants doivent savoir :

- ntiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » ;
- utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel et repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;

Notations : $\exists$, $\forall$.
Les étudiants doivent savoir employer les quantificateurs pour formuler de façon précise certains énoncés et leur négation. En revanche, l'emploi des quantificateurs en guise d'abréviations est exclu.

- distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;
- utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;
- formuler la négation d'une proposition ;
- ntiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;
- reconnaître et utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde.

2 - Ensembles, applications

L'objectif est d'acquérir le vocabulaire élémentaire sur les ensembles et les applications. On s'appuiera sur des représentations graphiques.

a) Ensembles, parties d'un ensemble

Ensemble, élément, appartenance.
Sous-ensemble (ou partie), inclusion. Ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E. Réunion. Intersection. Complémentaire. Complémentaire d'une union et d'une intersection.

On fera le lien entre les opérations ensemblistes et les connecteurs logiques usuels (« et », « ou »).
Le complémentaire d'une partie A de E est noté $\bar{A}$.

Lois de Morgan.

Produit cartésien.

On introduira les notations $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^n$.

b) Applications

Définition.
Composition.
Bijection, application réciproque.

Ces notions seront introduites sur des exemples simples.

3 - Calculs numériques et algébriques

Il s'agit de rappeler les notations $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ *et* $\mathbf{R}$, *les propriétés des opérations arithmétiques, les règles de calcul, le traitement des égalités et des inégalités.*

Puissances entières de 10.
Puissances entières d'un réel.

On attend en particulier la maîtrise des formules $(xy)^n = x^n y^n$, $x^{n+m} = x^n x^m$...

Développement, factorisation d'expressions algébriques.

On manipulera également des quotients.

Racine carrée d'un réel positif. Propriétés.

Identités remarquables.

Les attendus se limitent aux formules suivantes :
$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

Manipulation des inégalités.

Notion d'intervalle.
Intervalle ouvert, fermé, semi-ouvert.
Résolution d'équations et d'inéquations simples.

Il s'agit d'une reprise des types d'équations et d'inéquations abordées dans les classes antérieures et pratiquées en gestion.

4 - Polynômes à coefficients réels

Toute étude théorique sur les polynômes est exclue.

Racines et signe d'un polynôme du premier et du second degré. Discriminant.

Illustration graphique. $\boxed{\blacktriangleright}$
Factorisation d'un trinôme du second degré.

Fonctions polynomiales.

On identifie polynôme et fonction polynomiale.

Degré.
Somme, produit.
Factorisation d'un polynôme par $(x-a)$ si a est racine de ce polynôme.

Pratique, sur des exemples, de la division euclidienne. $\boxed{\blacktriangleright}$

Application à l'étude d'équations et d'inéquations.

II - Suites réelles

On présentera des exemples de suites issus du monde économique (capital et taux d'intérêt, emprunt à annuités constantes).
Les notions de comportement et de limite ne seront abordées qu'au second semestre.
Ce chapitre fournira l'occasion d'illustrer le raisonnement par récurrence.

Suites arithmétiques, suites géométriques.	Calcul du n-ième terme. ▶
Application aux suites arithmético-géométriques.	On se ramenera au cas d'une suite géométrique. ▶
Somme des n premiers nombres entiers naturels et somme des n premiers termes de la suite (q^k). Notation $\sum$.	Calculs de sommes portant sur les suites arithmétiques et géométriques. Transformation de $\sum_{i=1}^{n} au_i$ et $\sum_{i=1}^{n}(u_i + v_i)$. ▶

III - Fonctions réelles d'une variable réelle

Les fonctions logarithme et exponentielle étant étudiées au second semestre, il convient donc ici d'utiliser des fonctions qui se déduisent simplement des fonctions polynomiales, rationnelles ou racine carrée. Des représentations graphiques accompagneront la présentation de ce chapitre.

1 - Généralités

Vocabulaire : ensemble de définition, image, antécedent, représentation graphique d'une fonction. Fonctions paires, impaires. Fonctions monotones, strictement monotones. Fonctions majorées, minorées, bornées. Somme, produit, quotient de fonctions, composée de fonctions.	Illustration avec les fonctions usuelles connues : carré, cube, inverse, racine carrée.
Introduction de la notion de fonction bijective, fonction réciproque.	Lien avec l'équation $f(x) = c$.

2 - Limites

La définition formelle d'une limite est hors programme. Toute étude théorique sur les limites est exclue. Les résultats seront énoncés sans démonstration et illustrés par des représentations graphiques.

Limite d'une fonction en un point. Limite à droite, limite à gauche. Extension de la notion de limite en $+\infty$ ou en $-\infty$. Notion de limite infinie en un point, en $+\infty$ ou en $-\infty$. Opérations algébriques sur les limites. Limite d'une fonction composée.	▶
Limites des fonctions polynomiales et rationnelles en $+\infty$ et en $-\infty$.	Les limites sont données par les limites des monômes de plus haut degré ou leur quotient.

Interprétation graphique des limites : courbes asymptotes, asymptotes parallèles aux axes, directions asymptotiques.	▶

3 - Continuité

Continuité d'une fonction en un point. Continuité de la somme, du produit, du quotient de deux fonctions continues. Composition de deux fonctions continues.	Une fonction f est continue en a si et seulement si $f(x)$ admet pour limite $f(a)$ quand x tend vers a. Le prolongement par continuité est hors programme.

4 - Dérivabilité

Dérivabilité d'une fonction en un point, nombre dérivé, approximation affine au voisinage d'un point. Nombre dérivé à gauche et à droite.	Interprétation graphique. ▶
Fonction dérivée.	Notation f'.
Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une fonction composée.	
Caractérisation des fonctions constantes et monotones par le signe de la dérivée.	Résultat admis. Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et si $f' \geqslant 0$ sur I, ne s'annulant qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I.
Tableau de variation.	Sur des exemples, application à l'étude d'équations et d'inéquations, à l'obtention de majorations et de minorations.
Extremum local d'une fonction dérivable.	Une fonction f, dérivable sur un intervalle ouvert I, admet un extremum local en un point de I si sa dérivée s'annule en changeant de signe en ce point.
Dérivées successives, notation $f^{(p)}$.	La notion de fonction de classe C^p ou C^∞ est hors programme.

5 - Convexité

Tous les résultats de ce paragraphe seront admis. L'inégalité de la convexité n'est pas un attendu de 1ère année.

Définition d'une fonction convexe.	Une fonction est convexe (respectivement concave) si la courbe est au-dessous (respectivement au-dessus) des cordes. ▶
Position d'une courbe par rapport aux tangentes dans le cas où la fonction est convexe et dérivable.	▶

Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables.
Caractérisation d'un point d'inflexion si f est deux fois dérivable. ▶

IV - Probabilités sur un univers fini

L'objectif est de mettre en place dans le cas fini, un cadre dans lequel on puisse énoncer des résultats généraux et mener des calculs de probabilités sans difficulté théorique. On fera le lien avec l'emploi des arbres pondérés préconisé durant le cycle terminal du lycée.

1 - Espaces probabilisés finis

a) Observation d'une expérience aléatoire - Événements

Expérience aléatoire.
Univers Ω des résultats observables, événements. Opérations sur les événements, événements incompatibles, événements contraires.

On dégagera ces concepts à partir de l'étude de quelques situations simples.

Système complet d'événements finis.

On se limitera aux systèmes complets d'événements de type $A_1, ..., A_n$ ($n \in \mathbf{N}^*$) où les A_i sont des parties deux à deux disjointes et de réunion égale à Ω.

b) Probabilité

Une probabilité est une application P définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ et à valeurs dans $[0,1]$ vérifiant $P(\Omega) = 1$ et pour tous A et B incompatibles de $\mathcal{P}(\Omega)$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
Formule de Poincaré ou du crible pour deux, trois et quatre événements.

Cas de l'équiprobabilité.

c) Probabilité conditionnelle

Probabilité conditionnelle.
Si $P(A) \neq 0$, $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$.

Notation P_A.

Formule des probabilités composées.

Si $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$ alors :
$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\, P_{A_1}(A_2) \ldots P_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Formule des probabilités totales.

Si $A_1, ..., A_n$ est un système complet, alors pour tout événement B on a :
$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$$
On pourra appliquer la formule des probabilités totales à l'étude de chaînes de Markov simples.

Formule de Bayes.

d) Indépendance en probabilité

Indépendance de deux événements.

Si $P(A) \neq 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

Indépendance mutuelle de n événements.
Si n événements A_i sont mutuellement indépendants, il en est de même pour les événements B_i, avec $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$.

2 - Variables aléatoires réelles

On rappelle que l'univers Ω considéré est fini. Toutes les définitions qui suivent concernent ce seul cas.

Une variable aléatoire est une application de Ω dans $\mathbf{R}$.

On adoptera les notations habituelles telles que $[X = x]$, $[X \leqslant x]$, etc.

Système complet associé à une variable aléatoire

Fonction de répartition d'une variable aléatoire X.

$F_X(x) = P(X \leqslant x)$.

Loi de probabilité d'une variable aléatoire.

La fonction de répartition caractérise la loi d'une variable aléatoire.

Espérance d'une variable aléatoire finie.
$E(aX + b) = aE(X) + b$.

$E(X) = \sum_i x_i P[X = x_i]$.

V - Statistique univariée

Les notions de ce chapitre ont été abordées dans les classes antérieures. Il s'agit de préciser le vocabulaire, de rappeler quelques techniques de description statistique, de montrer sur des exemples concrets issus de situations réelles l'intérêt et les limites des résumés statistiques introduits.

Notions de population, d'individus et d'échantillon observé.

Un échantillon est une liste d'individus de la population. Si la liste est exhaustive, on l'identifie à la population.

Notion de caractère : caractère qualitatif, caractère quantitatif. Série statistique associée à un échantillon.

Un caractère est encore appelé variable statistique.

Description d'une série statistique : effectifs, fréquences, fréquences cumulées.

Représentations graphiques.

Diagrammes en bâtons, histogrammes. ▶

Analyse d'un caractère quantitatif : caractéristiques de position (moyenne, médiane) ; mode(s) ; caractéristiques de dispersion (variance et écart-type empiriques, quartiles, déciles).

On notera bien que les paramètres empiriques sont calculés à partir de l'échantillon observé. On montrera sur des exemples les avantages et les inconvénients des caractéristiques liées à la structure euclidienne (moyenne et écart-type) et ceux qui sont liés à la structure d'ordre (quantiles). ▶

Enseignement de mathématiques du second semestre

I - Systèmes linéaires

L'étude des systèmes linéaires à coefficients réels prépare la mise en place, en deuxième année, du calcul matriciel. Tout développement théorique est hors programme.

Résolution. Méthode du pivot de Gauss.	On présentera la méthode du pivot de Gauss à l'aide d'exemples numériques. On prendra les notations suivantes pour le codage des opérations élémentaires sur les lignes : $L_i \leftrightarrow L_j$; $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$ avec $i \neq j$; $L_i \leftarrow \alpha L_i$ avec $\alpha \neq 0$; $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$ avec $i \neq j$ et $\alpha \neq 0$.

II - Compléments d'analyse

En analyse, on évitera la recherche d'hypothèses minimales, tant dans les théorèmes que dans les exercices et problèmes, préférant des méthodes efficaces pour un ensemble assez large de fonctions usuelles.

Pour les résultats du cours, on se limite aux fonctions définies sur un intervalle de $\mathbf{R}$*. Les étudiants doivent pouvoir traiter les situations qui s'y ramènent.*

Toute étude théorique sur les limites (suites ou fonctions) est exclue. Les résultats seront énoncés sans démonstration.

1 - Fonction valeur absolue

Définition, notation, propriétés, représentation graphique.	Lien avec la distance dans $\mathbf{R}$.

2 - Suites réelles

Suite monotone, minorée, majorée, bornée.	
Limite d'une suite, définition des suites convergentes. Généralisation aux limites infinies.	$(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbf{R}$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient les u_n pour tous les indices n sauf pour un nombre fini d'entre eux. $\boxed{\blacktriangleright}$
Unicité de la limite.	
Opérations sur les limites. Compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre. Existence d'une limite par encadrement.	
Théorème de la limite monotone.	Toute suite croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée) converge. Toute suite croissante (resp. décroissante) non majorée (resp. non minorée) tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

3 - Limites de fonctions

Compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre.
Existence d'une limite par encadrement.
Théorème de la limite monotone.

Si f est croissante et majorée (resp. minorée) sur l'intervalle $]a, b[$, alors f admet une limite finie en b (resp. en a).
Si f est croissante et non majorée (resp. non minorée) sur l'intervalle $]a, b[$, alors f admet pour limite $+\infty$ en b (resp. $-\infty$ en a).
Cas analogues pour f décroissante.
Extension aux cas où a ou b sont infinis.

4 - Continuité sur un intervalle

Théoreme des valeurs intermédiaires : l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Ces énoncés seront admis.

Fonction continue strictement monotone sur un intervalle. Caractère bijectif. Continuité et sens de variation de la fonction réciproque. Représentation graphique de la fonction réciproque.

On utilisera ce résultat pour étudier des équations du type $f(x) = k$. ▶

5 - Fonctions logarithme et exponentielle

Les fonctions hyperboliques sont hors programme.

Fonction logarithme népérien.
Dérivée, limites, représentation graphique

La fonction logarithme est introduite comme primitive de la fonction inverse sur $\mathbf{R}_+^*$.
$\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Fonction exponentielle.
Dérivée, limites, représentation graphique.

La fonction exponentielle est introduite comme réciproque de la fonction logarithme.
$\exp(a + b) = \exp(a)\ \exp(b)$.

Fonctions puissances (exposant réel).

Comparaison des fonctions exponentielle, puissances et logarithme au voisinage de l'infini et au voisinage de 0.

Pour $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha}$, $\lim\limits_{x \to 0} (x^\alpha \ln x)$.

III - Probabilités sur un univers fini

1 - Coefficients binomiaux

On donne dans ce paragraphe l'interprétation combinatoire de ces coefficients mais on évitera toute technicité dans les exercices.

Factorielle, notation $n!$.

Interprétation de $n!$ en tant que nombre de permutations d'un ensemble à n éléments. ▶

Parties à k éléments d'un ensemble à n éléments.
Coefficients binomiaux, notation $\binom{n}{k}$.
$\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
Relation $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
Formule du triangle de Pascal :
$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$.

On fera le lien entre les parties à k éléments d'un ensemble à n éléments et le nombre de chemins d'un arbre réalisant k succès pour n répétitions. Ces relations pourront faire l'objet de manipulations sur la notation factorielle.
La formule de Pascal fournit un algorithme de calcul pour le calcul numérique des coefficients. ▶

2 - Variables aléatoires réelles

Les variables aléatoires étudiées sont encore définies sur un univers fini.

Variable aléatoire $Y = g(X)$ lorsque g est une fonction à valeurs réelles.

Théorème de transfert.

$E(g(X)) = \sum_i g(x_i)P[X = x_i]$. Théorème admis

Variance d'une variable aléatoire. Écart-type.

Notations $V(X)$, $\sigma(X)$.

$V(aX + b) = a^2V(X)$.

Formule de Koenig-Huygens.

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

Variables centrées, centrées réduites.

Notation X^* pour la variable aléatoire centrée réduite associée à X.

3 - Lois usuelles finies

Les étudiants devront connaître l'espérance et la variance des lois usuelles.

Loi certaine.

Loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

Notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$. ▶

Loi de Bernoulli.

Notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Loi binomiale.

Notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. ▶

Application : formule du binôme de Newton.
$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Lorsque a et b sont strictement positifs, lien avec la loi $\mathcal{B}(n, p)$ pour $p = \dfrac{a}{a+b}$. La formule du binôme de Newton dans le cas général pourra être démontrée par récurrence.

IV - Intégration sur un segment

Pour le calcul d'intégrales à partir des primitives, on se limitera à des exemples simples. Les changements de variable sont hors programme.

1 - Définition

Aire sous la courbe d'une fonction positive.

Dans le cas où f est affine positive, on constatera que cette fonction « aire sous la courbe » admet f pour dérivée.

Primitive d'une fonction continue sur un intervalle.

Toute fouction f continue sur un intervalle y admet au moins une primitive F.

Admis.

Sur un intervalle si F est une primitive de f alors toute autre primitive est de la forme $F+c$ où c est une constante.

Intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Relation de Chasles.

Définition : $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = F(b) - F(a)$, où F est une primitive de f sur I. Cette définition est indépendante du choix de la primitive F de f sur I.

2 - Propriétés de l'intégrale

Linéarité de l'intégrale. Intégration par parties.

Positivité de l'intégrale. Comparaison d'intégrales.

Sur des exemples, on pourra mettre en œuvre la méthode des rectangles pour le calcul approché d'une intégrale. $\boxed{\blacktriangleright}$

Interprétation géométrique de l'intégrale d'une fonction continue positive.

3 - Application

Introduction de la notion de variable aléatoire à densité : exemple de la loi uniforme sur un segment.

Simulation. $\boxed{\blacktriangleright}$

I - Éléments d'informatique et d'algorithmique

L'objectif est d'initier les étudiants à l'algorithmique et à l'utilisation de l'informatique en mathématiques au travers de thèmes empruntés au programme pour comprendre, illustrer et éclairer les notions introduites. Dès qu'un calcul numérique est envisagé, dès qu'un problème incite à tester expérimentalement un résultat, dès qu'une situation aléatoire peut être modélisée avec des outils informatiques, le recours à des algorithmes et des logiciels devra devenir naturel.
Le logiciel retenu pour la programmation dans ce programme des classes économiques et commerciales est Scilab.
L'utilisation du logiciel se fait en continuité avec le cours de mathématiques et sera suivi d'une mise en œuvre sur ordinateur. Seules les notions de Scilab indiquées dans le programme sont exigibles.

1 - L'environnement logiciel Scilab

a) Constantes prédéfinies. Création de variables par affectation.

`%pi` `%e`

Approximations de π et e.

Affectation : `nom = expression`

// permet de commenter une commande.

L'expression peut être du type numérique, matricielle ou du type chaîne de caractères.

b) Constructions de vecteurs et de matrices numériques

Vecteurs lignes : `[ , ,..., ]`
Vecteurs colonnes : `[;;...;]`
Matrices $n \times p$: `[ ,...,;...; ,..., ]`

c) Opérations élémentaires

Opérations arithmétiques :

+	-	*	/	^

Les opérations arithmétiques de base s'appliquent aux variables numériques ou matricielles.

Comparaisons - tests :

==	>	<	>=	<=	<>

Logiques :

&	|
and	or

d) Fonctions usuelles prédéfinies

Fonctions numériques usuelles :
`log, exp, floor, abs, sqrt`

Toutes ces fonctions peuvent s'appliquer à des variables numériques ou à des matrices élément par élément.

Fonction `rand`	La fonction `grand` pourra être utilisée avec les paramètres correspondant aux lois de probabilité présentes dans le programme.
Transposée d'une matrice : `A'`	Extraction ou modification d'un élément, d'une ligne ou d'une colonne d'une matrice. On pourra utiliser les fonctions `size(A)`, `find` dans le cadre de simulations. Les opérations matricielles (+ - *) n'interviendront que lorsqu'elles faciliteront le traitement des données.

2 - Graphisme en deux dimensions

Courbes représentatives de fonctions usuelles, de densités et de fonctions de répartition. Tracé d'histogrammes.	On pourra utiliser les fonctions `plot`, `plot2d`, `bar`, `histplot`, la fonction `linspace(a,b,n)` et les opérations $\boxed{\texttt{./}}$, $\boxed{\texttt{.*}}$, $\boxed{\texttt{.\^{}}}$

3 - Programmation d'algorithmes et de fonctions

Les structures suivantes seront utilisées :

Structure conditionnelle :
`if ...then ...end`
`if ...then ...else ...end`	

Structures répétitives :
`for k=...: :...end`
`while ...then ...end`
	Exemples : $n!$, $\binom{n}{p}$.

Fonctions - arguments - retour de résultats.	Saisie au clavier - message indicatif possible. Affichage du contenu d'une variable à l'écran avec commentaire éventuel.
Fonction d'entrée des données `input()` Fonction de sortie de résultat(s) `disp()`	

II - Liste de savoir-faire exigibles en première année

Calcul des termes d'une suite.	Exploitation graphique des résultats.
Calculs de valeurs approchées de la limite d'une suite.	On utilisera des structures répétitives et conditionnelles en exploitant l'étude mathématique. La détermination du rang d'arrêt du calcul résultera directement de l'étude mathématique ou d'un algorithme qui en découle.
Calcul approché de la racine d'une équation du type $f(x) = 0$.	On utilisera différentes méthodes dont certaines résulteront d'une étude mathématique (suites récurrentes, encadrements, dichotomie).
Calcul des valeurs approchées d'une intégrale par la méthode des rectangles.	
Utilisation de la fonction `rand` pour simuler des expériences aléatoires élémentaires conduisant à une loi usuelle.	Loi uniforme, loi binomiale.
Simulation de phénomènes aléatoires.	Utilisation de la fonction `grand`